Θέματα Άλγεβρας Κοντολάτου
Ιανουάριος 2015

Θέμα 1ο
Έστω ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, όπου $m \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Αποδείξτε πως τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_m$ αποτελούν πολλαπλασιαστική ομάδα.

(B) Έστω $x \in \mathbb{Z}$ σχετικά πρώτος με το m. Να δείξετε ότι $x^{\varphi(m)} = 1(\bmod m)$.

(Γ) Βρείτε στοιχείο κ της ομάδας $(\mathbb{Z}_{17}, +)$ τ.ω. κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}_{17}$ να είναι πολλαπλάσιο του κ.

Θέμα 2ο

(A) Έστω $f : (A, \bullet) \to (B, \star)$ ομομορφισμός ομάδων. Αποδείξτε ότι η αντίστροφη εικόνα υποομάδας της B, μέσω του f, είναι υποομάδα της A.

(B) Έστω $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε πως η απεικόνιση της ορίζουσας $D : (GL(n, \mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Βρείτε τον πυρήνα $\ker D$ και δείξτε ότι $GL(n, \mathbb{R}) / \ker D \cong \mathbb{R}^*$.

(Γ) Έστω $(A, +, \cdot)$ ακέραια περιοχή. Αποδείξτε πως η δομή $(A, +, \cdot)$ είναι σώμα, αν το A είναι πεπερασμένο.

(Δ) Αποδείξτε ότι τα σώματα των μιγαδικών και πραγματικών αριθμών δεν είναι ισόμορφα.

Θέμα 3ο

(A) Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος και I, J ιδεώδη αυτού. Να δείξετε ότι το $I \cap J$ είναι ιδεώδες του R.

(B) Έστω R μοναδιαίος και αντιμεταθετικός δακτύλιος, $\lambda \in R$, $f(x) \in R[x]$. Αποδείξτε ότι

(1) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x-\lambda$ ισούται με $f(\lambda)$.

(2) το λ είναι ρίζα του $f(x)$ αν και μόνο αν το $x-\lambda$ διαιρεί το $f(x)$.

(Γ) Έστω το πολυώνυμο $f(x)=x^{196}-38x^{102}-120x^{65}+79x^{56}+31\in\mathbb{Z}[x]$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $q(x)\in\mathbb{Z}[x]$ τ.ω. $f(x)=(x-12)q(x)$.

Συνοπτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα 1ο

(Α) Έστω U_m το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_m$. Ισχύει ότι $x\in U_m \Leftrightarrow \mu\kappa\delta(x,m)=1$.

- η προσεταιριστικότητα ισχύει
- το $\bar{1}\in U_m$ ουδέτερο στοιχείο
- αν $x\in U_m$, τότε $x^{-1}\in U_m$(αντίστροφο)
- αν $x,y\in U_m$, τότε $xy\in U_m$(κλειστότητα)

Άρα U_m είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

(Β) Η συνάρτηση του Euler $\varphi(m)$ μετράει το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι σχετικά πρώτοι με το m και μικρότεροι ή ίσοι του m. Άρα $|U_m|=\varphi(m)$. Συνεπώς για $x\in\mathbb{Z}$ με $\mu\kappa\delta(x,m)=1\Leftrightarrow x\in U_m$ έχουμε ότι $x^{\varphi(m)}=1(\mod m)$.

(Γ) Ουσιαστικά θέλουμε έναν γεννήτορα της $(\mathbb{Z}_{17},+)$. Είναι $\kappa=\bar{1}$.

Θέμα 2ο

(A) Έστω $K \leq B$. Αρκεί ν.δ.ο. για κάθε $a, x \in f^{-1}(K)$ ισχύει $ax^{-1} \in f^{-1}(K)$. Έστω τυχαία $a, x \in f^{-1}(K)$. Τότε $f(a), f(x) \in K$. Επειδή $K \leq B$ και f ομομορφισμός έχουμε ότι

$$f(a)[f(x)]^{-1} = f(ax^{-1}) \in K \Rightarrow ax^{-1} \in f^{-1}(K)$$

.

(B) Από τη Γραμμική Άλγεβρα ξέρουμε ότι $Det(AB) = Det(A)Det(B)$, οπότε η D είναι ομομορφισμός. Είναι $\ker D = \{A \in (GL(n, \mathbb{R}), \cdot) : D(A) = 1\}$. Έχουμε ότι $Im(D) = \mathbb{R}^*$, άρα από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών προκύπτει το ζητούμενο.

(Γ) Έστω A πεπερασμένο και $A = \{0, 1, a_1, \ldots, a_n\}$. Πρέπει ν.δ.ο. κάθε μη μηδενικό στοιχείο του A είναι αντιστρέψιμο. Το 1 είναι αντιστρέψιμο. Έστω $a \in A \setminus \{0, 1\}$. Λόγω των νόμων της διαγραφής που ισχύουν σε ακέραιες περιοχές πρέπει κάποιο από τα γινόμενα $aa_1, \ldots, aa_n$ να ισούται με 1, δηλαδή το τυχαίο α είναι αντιστρέψιμο. Συνεπώς A σώμα.

(Δ) Έστω ότι είναι ισόμορφοι. Δηλαδή υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $[f(i)]^2 = f(i^2) = f(-1) = -f(1) = -1$, το οποίο είναι άτοπο, διότι $f(i) \in \mathbb{R}$.

Θέμα 3ο

(A) Η τομή υποομάδων είναι υποομάδα. Επομένως $(I \cap J, +)$ είναι αβελιανή ομάδα. Έστω $r \in R$ και $u \in I \cap J$. Τότε $u \in I$ και $u \in J$. Αφού όμως I, J ιδεώδη $ru, ur \in I$ και $ru, ur \in J$, οπότε $ru, ur \in I \cap J$, που σημαίνει ότι το $I \cap J$ είναι ιδεώδες.

(B)

(1) Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $f(x) = (x - \lambda)q(x) + r(x)$ όπου το $r(x)$ είναι σταθερό. Άρα $r(x) = r$ και έχουμε ότι $f(\lambda) = r$.

(2) (Ευθύ) Αν το λ είναι ρίζα του $f(x)$, τότε από το (1) προκύπτει ότι $r = f(\lambda) = 0$, δηλαδή το $(x - \lambda)$ διαιρεί το $f(x)$.
(Αντίστροφο) Αν $f(x) = (x - \lambda)q(x)$. Τότε προφανώς $f(\lambda) = 0$.

(Γ) Θα εφαρμόσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ τ.ω. $f(x) = (x - 12)q(x)$. Τότε θα υπάρχει ανάλυση του $f(x)$ στον $\mathbb{Q}[x]$ σε δύο πολυώνυμα με βαθμούς 1 και βαθμό ίσο με του $q(x)$. Άρα το $f(x)$ έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$ και κατ' επέκταση και στο $\mathbb{Z}$. Από την ανάλυση $f(x) = (x-12)q(x)$, το 12 είναι ρίζα του $f(x)$ που πρέπει να διαιρεί τον σταθερό του όρο, το 31, άτοπο.